

# MATEMATICĂ

clasa a X-a

BREVIAR TEORETIC. EXERCIȚII ȘI PROBLEME  
PROPUSE ȘI REZOLVATE. TESTE DE EVALUARE.  
TESTE SUMATIVE

- filiera teoretică ■ profilul real
- specializarea științe ale naturii
  
- filiera tehnologică

Consultant:

*Prof.univ.dr.mat.em. OCTAVIAN STĂNĂȘILĂ*



NICULESCU

## Algebră

<i>Capitolul I. Numere reale .....</i>	8
1. Proprietăți ale puterilor cu exponent real ale unui număr pozitiv. Aproximări rationale pentru numere iraționale .....	8
2. Radical dintr-un număr real. Proprietăți ale radicalilor .....	15
3. Logaritmul unui număr pozitiv.....	20
 <i>Capitolul II. Funcții .....</i>	 27
1. Funcții. Recapitulare și completări.....	27
2. Funcții injective, surjective, bijective. Funcții inversabile. Funcții convexe și concave .....	35
3. Funcția putere și funcția radical .....	41
4. Ecuații iraționale .....	48
5. Funcția exponențială și logaritmică .....	53
6. Ecuații exponențiale, ecuații logaritmice .....	60
7. Funcții trigonometrice inverse. ....	68
 <i>Capitolul III. Numere complexe .....</i>	 73
1. Numere complexe sub formă algebrică; conjugatul unui număr complex, modulul unui număr complex. Operații cu numere complexe .....	73
2. Rezolvarea în $\mathbb{C}$ a ecuației de gradul al doilea cu coeficienți reali; ecuații bipătrate .....	81
3. Interpretarea geometrică a operațiilor de adunare și scădere a numerelor complexe și a înmulțirii acestora cu un număr real .....	88
 <i>Capitolul IV. Metode de numărare .....</i>	 97
1. Mulțimi finite ordonate. Probleme de numărare .....	97
2. Permutări .....	100
3. Combinări și aranjamente .....	104
4. Binomul lui Newton .....	109

Rezumatul V. Matematici financiare .....	116
1. Elemente de calcul financiar: procente, dobânzi, TVA .....	116
2. Culegerea, clasificarea și prelucrarea datelor statistice; reprezentări grafice ale datelor statistice .....	121
3. Interpretarea datelor statistice prin parametri de poziție: medii, dispersii, abateri de la medie .....	125
4. Evenimente egal probabile. Probabilitate. Probabilități condiționate .....	132
5. Scheme clasice de probabilitate. Variabile aleatoare .....	138

## Geometrie

1. Reper cartezian. Coordonate carteziene în plan. Distanța dintre două puncte. Coordonatele unui vector .....	148
2. Ecuări ale dreptei în plan determinate de un punct și o direcție dată și ale dreptei determinate de două puncte distințe .....	156
3. Condiții de paralelism, condiții de perpendicularitate a două drepte din plan. Calcule de distanțe și arii .....	162

## Teste sumative

Teste 1-10 .....	174
------------------	-----

## Răspunsuri

Algebră .....	186
Geometrie .....	286
Teste sumative .....	302

# NUMERE REALE

## 1. Proprietăți ale puterilor cu exponent real ale unui număr pozitiv. Aproximări raționale pentru numere iraționale

### **IMPORTANT!**

- Definiție: Fie  $a \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Numărul real pozitiv  $x$ , cu proprietatea  $x^n = a$ , se numește puterea cu exponentul rațional  $\frac{1}{n}$  a numărului real pozitiv  $a$  și se notează cu  $a^{\frac{1}{n}}$ .

*Proprietăți ale puterilor unui număr real pozitiv*

Pentru orice  $a > 0$ ,  $b > 0$ , avem relațiile:

$$1) a^0 = 1$$

$$2) a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

$$3) a^{-n} = \frac{1}{a^n}, n \in \mathbb{Q}$$

$$4) a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n, n \in \mathbb{Q}$$

$$5) \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, n \in \mathbb{Q}$$

$$6) (a^m)^n = a^{m \cdot n}, m, n \in \mathbb{Q}$$

$$7) a^m \cdot a^n = a^{m+n}, m, n \in \mathbb{Q}$$

$$8) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m, n \in \mathbb{Q}$$

*Observație:* Proprietățile 3), 4), 5), 6), 7), 8) rămân valabile și pentru  $m, n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

### *Aproximări raționale pentru numere iraționale*

- Dacă  $a = a_0, a_1a_2\dots a_n \dots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , atunci  $a'_n = a_0, a_1a_2\dots a_n$  se numește *aproximarea prin lipsă* cu o eroare mai mică de  $10^{-n}$ , iar  $a''_n = a_0, a_1a_2\dots a_n + 10^{-n}$  se numește *aproximarea prin adăos* cu o eroare mai mică de  $10^{-n}$ .

*Observație:*  $a'_n < a < a''_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

De exemplu, pentru  $\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  avem următoarele aproximări:

$$a'_0 = 2 < \sqrt{5} < 3 = a''_0$$

$$a'_1 = 2,2 < \sqrt{5} < 2,3 = a''_1$$

$$a'_2 = 2,23 < \sqrt{5} < 2,24 = a''_2$$

$$a'_3 = 2,236 < \sqrt{5} < 2,237 = a''_3$$

$$a'_4 = 2,2360 < \sqrt{5} < 2,2361 = a''_4$$

$$a'_5 = 2,23606 < \sqrt{5} < 2,23607 = a''_5$$

- Dacă  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  și  $a > 0$ , atunci  $a^x$  este unicul număr real care verifică relația:

$$a^{x'_n} < a^x < a^{x''_n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Folosind aproximările de mai sus, putem descrie aproximări ale numărului real  $-\sqrt{5}$ .

$$a_0' = -3 < -\sqrt{5} < -2 = a_0''$$

$$a_1' = -2,3 < -\sqrt{5} < -2,2 = a_1''$$

$$a_2' = -2,24 < -\sqrt{5} < -2,23 = a_2''$$

$$a_3' = -2,237 < -\sqrt{5} < -2,236 = a_3'' \dots$$

### Modele pentru rezolvarea problemelor și redactarea soluțiilor

1. Calculați  $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^3 \cdot [(-1)^{-2}]^3$ .

*Soluție*

Aplicând proprietățile puterilor unui număr real obținem:

$$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^3 \cdot [(-1)^{-2}]^3 = (3^2)^3 = 3^6 = 729.$$

2. Calculați  $\left(-\frac{10}{17}\right)^5 \cdot \left(-\frac{51}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)^5$ .

*Soluție:*

$$\left[\left(-\frac{10}{17}\right) \cdot \left(-\frac{51}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)\right]^5 = \left(-\frac{10}{17} \cdot \frac{17}{2} \cdot \frac{1}{5}\right)^5 = (-1)^5 = -1.$$

3. Calculați  $10 \cdot \{18^2 : 324 + 2 \cdot [(2^2 \cdot 3)^{15} : (2^{29} \cdot 3^{15}) + 1^{2017}]\}$

*Soluție:*

$$10 \cdot \{324 : 324 + 2 \cdot [(2^{30} \cdot 3^{15}) : (2^{29} \cdot 3^{15}) + 1]\} = \\ 10 \cdot [1 + 2 \cdot (2 + 1)] = 10 \cdot (1 + 2 \cdot 3) = 10 \cdot 7 = 70.$$

### Exerciții și probleme pentru fixarea cunoștințelor

1. Calculați:  $2^{-2} \cdot 4^{-2} \cdot 8^{-2} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{-2}$ .

2. Calculați:  $5^{-3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot 25^{-3} \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^{-3}$ .

3. Efectuați:

$$\{(-27)^{103} : 81^{50} : (-9)^{51} + (-343)^{45} : (-49)^{52} : 7^{27} + [(-9)^{30} \cdot (-625)^{15}] : (-225)^{29}\}^{101} : (-121)^{49}.$$

4. Efectuați:  $\left(\frac{3}{4}\right)^{100} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{200} \cdot \left(\frac{25}{3}\right)^{100}$ .

Respect pentru sămeni și copii!

$$\text{b) } \left( a + \left( 1 + \left( \frac{3-a}{a+1} \right)^{-1} \right)^{-1} \right)^{-1} \text{ pentru } a = -\frac{1}{3}.$$

**21. Demonstrați identitățile:**

$$\text{a) } a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2);$$

$$\text{b) } a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4);$$

$$\text{c) } a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \text{ pentru } n \notin \mathbb{N};$$

$$\text{d) } a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}), \text{ pentru } n \notin \mathbb{N};$$

$$\text{e) } \frac{a^5 - b^5}{a^5 + b^5} + \frac{a^5 + b^5}{a^5 - b^5} = \frac{2(a^{10} + b^{10})}{a^{10} - b^{10}}, \text{ pentru } a \neq \pm b.$$

$$\text{22. Arătați că: } \frac{1-a}{1-a^{-1}} + \frac{1+a^{-1}}{1-a} + \frac{1+a}{1-a^{-1}} + \frac{1-a^{-1}}{1+a} = 4, \text{ pentru orice } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

$$\text{23. Arătați că dacă } x \neq 0 \text{ și } x \neq 1, \text{ atunci } \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{x^4} \right) = \frac{x^8 - 1}{(x-1)^6 x^7}.$$

**24. Calculați:**

$$\text{a) } \frac{2^3 \cdot 5^4 \cdot 3^7}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 3^8} + \frac{(2^5)^6}{16^8} + 1^{2013} \cdot 2014^0;$$

$$\text{b) } a^{\frac{3}{4}} \cdot \left( a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}} \right)^6 : \left( a^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{4}};$$

$$\text{c) } \frac{a^{\frac{2}{3}} \left( a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{2}{5}}}{a^{1,5} \cdot (b^{15})^{\frac{1}{12}}} \cdot \left( \frac{a^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{3}{5}}} \right)^{15};$$

$$\text{d) } \frac{\frac{1}{3} - a^{-1}}{\frac{1}{9} - \left( \frac{1}{a} \right)^2} : \left( \frac{1}{2^{-2}(3+a)} - 2a^{-1} - 1 \right), \text{ pentru } a = \frac{1}{2}.$$

Respect pentru oameni și cărți

## Exerciții și probleme pentru aprofundarea cunoștințelor

1. Ordonați crescător elementele mulțimii  $A = \left\{ 2, \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}, 8^{\frac{17}{3}}, (-2)^6 \right\}$ .

2. Aflați valoarea expresiei:

a)  $E(x) = \frac{2(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{x^2 - (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}$ , pentru  $x = \frac{1}{2} \left( \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} \right)$ ;

b)  $E(x, y) = \frac{\frac{3}{x^2} + \frac{3}{y^2}}{\frac{2}{(x^2 - xy)^3}} : \frac{(x-y)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{3}{x^2} - \frac{3}{y^2}}$ , pentru  $x = -2$  și  $y = 3$ .

3. Calculați:

a)  $\frac{3^{n+1} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+2} + 6 \cdot 3^n \cdot 5^n}{2^{2n+1} \cdot 3^n + 3^{n+1} \cdot 4^n + 6^{n+1} \cdot 2^{n+1}}$ ;

b)  $(1 + 3 \cdot 3^{99} + 3^{76} : 3^{16} - 3 \cdot 3^{59}) : (1 + 9^{25} \cdot 3^{50} + 240^5 - 2^{20} \cdot 15^5)$ ;

c)  $\left( \frac{2a(b+c)}{a^2 + (b+c)^2} \right)^2 + \frac{a^2 - (b+c)^2}{a^2 + (b+c)^2}$ .

4. Ordonați crescător:  $64^{-105} \cdot 27^{200}$  și  $\left(\frac{1}{4}\right)^{315} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-600}$ .

5. Arătați că dacă  $m, n \in \mathbb{N}$  și  $a = [(-5)^{m+1} + (-5)^{m+2} - (-4)^{n+12} + (-4)^{n+13}]$ , atunci  $a \vdots 20$ .

6. Arătați că dacă  $n \in \mathbb{N}$  și  $b = [(-32)^n + (32)^{n+1}]$ , atunci  $b \vdots 31$ .

7. Determinați  $n \in \mathbb{N}$  pentru care  $(2^n - 6^n) \vdots 10$ .

8. Arătați că  $(-2)^{n+1} + (-2)^{n+2} + \dots + (-2)^{n+725} \vdots 22$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

9. Calculați:

a)  $\sqrt{17 + 4\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}}$ ;      b)  $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ ;

c)  $\left( \frac{5}{a^2} - \frac{3}{ab^2} + \frac{3}{a^2b} - \frac{5}{b^2} \right) : \left( \left( \frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} \right) \left( \frac{3}{b^4} - \frac{3}{a^4} \right) \right)$ .

$$\left\{ \left(1-a^2\right) \left[ \frac{\frac{3}{1-a^2} + \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{1-a^2}} \right]^{-1} \left[ \frac{\frac{1+a^2}{1-a^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{1+a^2}} \right]^{-1} + 1 \right\} : \sqrt{(1-2a+a^2)^{-1}}, \text{ pentru } a > 1.$$

11. Aflați valoarea expresiei:

a)  $E = \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-3} + b^{-3}} : \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2 - 3ab} \cdot \left( \frac{a^2 - b^2}{ab} \right)^{-1}$ , pentru  $a = 1 - \sqrt{2}$  și  $b = 1 + \sqrt{2}$ ;

b)  $E = (x^{-1} + y^{-1})(x^{-2} - (xy)^{-1} + y^{-2})$ .

12. Efectuați  $\frac{1}{a^2 c} \sqrt{3a^8 c^4 d} + \frac{2}{ac^2} \sqrt{12a^6 c^6 d} - a^4 c^2 \sqrt{\frac{3d}{a^4 c^2}}$ , unde  $a, b, c, d \in (0, \infty)$ .

13. Calculați  $E = \left[ \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + 1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - 1} \right]^{-\frac{1}{2}} + \left[ \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + 1} \right]^{-\frac{1}{2}}$ , pentru  $x \in (-1, 0)$ .

14. Calculați  $E = \frac{2b\sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$ , pentru  $x = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$ , unde  $a, b > 0$ .

15. Comparați numerele: a) 5,34297 și 5,34298; b) -6,2739 și -6,2736.

16. Aproximați prin lipsă și prin adaos, cu o eroare mai mică decât  $10^{-3}$ , numărul

$$\frac{3+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} + \frac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}.$$

17. Arătați că numărul  $A = 2^{20} + 2^{17} + 2^{12}$  este pătrat perfect.18. Arătați că numărul  $\sqrt{2012^{2010} + 2014^{2011}}$  este irațional.19. Demonstrați că numărul  $\sqrt{1^n + 5^n + 6^n}$  este irațional, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .20. Fie  $a_n = \sqrt{7^n + 2002}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .a) Aflați prima zecimală a numărului  $a_1$ ;b) Arătați că  $a_n \notin \mathbb{Q}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .21. Demonstrați că  $\frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^4}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{3x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} < 2$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$ .22. Arătați că  $E = \left(\frac{1}{11}\right)^0 + \left(\frac{1}{11}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{11}\right)^{1994} < \frac{10}{9}$ .